量子光学复习题

黄晨

2021 年 6 月 7 日

1 名词解释

- **能态密度**：单位能量间隔中的能态数目。

$$\rho(E_n) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E_n} \tag{1}$$

- **纯态与混态**
  - **纯态**：$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$

$$\mathrm{tr}(\rho) = 1 \qquad \mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = 1$$

  - **混态**：系统并不处在一个确定的态中，而是分别以 $p_1, p_2, \cdots$ 的概率处在态 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots$ 中。

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| \qquad \mathrm{tr}(\rho) = 1 \qquad \mathrm{tr}\left(\rho^2\right) < 1 \tag{2}$$

- **量子噪声与标准量子噪声极限**
  - **量子噪声**：由 Heisenberg 测不准关系限定的正交分量起伏。
  - **标准量子噪声极限**：相干态噪声，$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}$。
- **光子群聚与反群聚效应**
  - **群聚**：光子有聚束的效应 $g^{(2)}(\tau) > 1$
  - **反群聚**：光子有远离的倾向 $g^{(2)}(\tau) < 1$
- **偶极近似**：忽略电磁场中磁场的作用；假设电场是均匀的。
- **旋波近似**：在相互作用 Hamiltonian 中忽略快变项。
- **半经典近似**：原子是量子化的（考虑能级结构），光看成经典场。
- **平均场近似**：$\langle AB\rangle = \langle A\rangle\langle B\rangle + \langle \Delta A \Delta B\rangle \approx \langle A\rangle\langle B\rangle$
- **原子与光腔超强耦合**：$g \gg \Gamma, \kappa$。其中 g 是原子与光腔的耦合强度，Γ 是原子耗散强度，κ 是腔场耗散强度。
- **Rabi 模型**

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \varepsilon_g |g\rangle\langle g| + \varepsilon_e |e\rangle\langle e| + \hbar\Omega_0 \left(a + a^\dagger\right) \left(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|\right) \tag{3}$$

- **Jaynes-Cummings 模型**：Rabi 模型经过旋波近似后得到 Jaynes-Cummings 模型。

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \varepsilon_g |g\rangle\langle g| + \varepsilon_e |e\rangle\langle e| + \hbar\Omega_0 \left(a |e\rangle\langle g| + a^\dagger |g\rangle\langle e|\right) \tag{4}$$

- **红失谐与蓝失谐**：原子频率 ω_a，光场频率 ω，失谐 $\Delta = \omega_a - \omega$。
  - **红失谐**：$\Delta > 0$
  - **蓝失谐**：$\Delta < 0$

- **场的功率谱**：场的功率谱与一阶关联函数互为 Fourier 变换对。

$$S(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\omega\tau} G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}, \tau)\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

- **单光子源**：一次给定时间内仅辐射一个光子的光源。

- **热光场**

$$\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta H} = \sum_n \frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n| \tag{6}$$

- **光子统计**
  - **Poisson 统计** (e.g. 相干态)：$\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle n\rangle \quad \Leftrightarrow \quad g^{(2)}(0) = 1$
  - **Sub-Poisson 统计** (e.g. Fock 态)：$\langle(\Delta n)^2\rangle < \langle n\rangle \quad \Leftrightarrow \quad g^{(2)}(0) < 1$
  - **Super-Poisson 统计** (e.g. 真空压缩态)：$\langle(\Delta n)^2\rangle > \langle n\rangle \quad \Leftrightarrow \quad g^{(2)}(0) > 1$

- **光场分布函数与光子计数分布函数**
  - **光场分布函数**：光场处于有 n 的光子的状态的概率 $P_n = \rho_{nn}$。
  - **光子计数分布函数**：当光场处于一般状态时，观察到 m 个光电子的概率 $P_m = \sum_n P_m^{(n)}\rho_{nn}$。

- **振幅压缩与相位压缩**
  - **振幅压缩**：振幅方向 $\Delta Y_1 < \frac{1}{2}$
  - **相位压缩**：相位方向 $\Delta Y_2 < \frac{1}{2}$

- **量子态层析**：用不同测量基下的测量结果把光场的量子态完整地重构出来。

- **Purcell 效应**：当原子和腔处于弱耦合 $(g \ll \Gamma, \kappa)$ 状态的时候，原子的固有自发辐射将受到腔模的调制。

- **最小不确定态**：不确定关系 $[A, B] = iC$，最小不确定态满足 $\Delta A\Delta B = |\langle C\rangle|^2/2$。最小不确定态与考虑的算符组有关，例如相干态是关于 X_1, X_2 的最小不确定态。

2

(1) 从经典谐振子到量子谐振子的二次量子化思路，说一说你对二次量子化的理解。

思路：

1. 构造系统的 Lagrangian，计算系统的 Hamiltonian；
2. 规定算符及其对易关系；
3. 转到粒子数表象。

理解：利用产生算符和湮灭算符在对称化的希尔伯特空间处理全同粒子系统。

(2) 无光照射处于激发态的原子为什么会发光，怎样控制原子发光?

处于激发态的原子会由于自发辐射掉到基态，从而发射光子。原子发光与拉氏频率、腔的良好度、真空的能量密度有关。

(3) 计算自由空间电磁场的能态密度。

利用箱归一化，

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L} \tag{7}$$

则

$$\mathrm{d}N = 2\mathrm{d}n_x\mathrm{d}n_y\mathrm{d}n_z = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z \tag{8}$$

在 $k \to k + \mathrm{d}k$ 范围内

$$\mathrm{d}N = 2\mathrm{d}n_x\mathrm{d}n_y\mathrm{d}n_z = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2\mathrm{d}k\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{L^3}{\pi^2}k^2\mathrm{d}k \tag{9}$$

又 $k = \omega/c$

$$\mathrm{d}N = \frac{L^3\omega^2}{\pi^2c^3}\mathrm{d}\omega \tag{10}$$

能态密度

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega} = \frac{L^3\omega^2}{\pi^2c^3} \tag{11}$$

3

(1) 真空涨落无处不在吗？如何克服真空噪声的制约？
真空涨落几乎无处不在，可用填补真空或改变真空的方式克服真空噪声的制约。

- 填补真空：用非真空的量子环境填补真空。
- 改变真空：用腔 (腔内空间比自由空间安静)。

(2) 为什么要用腔？如何提高腔中光子的寿命？
因为腔内空间比自由空间安静。

$$Q = \omega\tau \tag{12}$$

可以提升腔的品质因素，从而提高光子寿命。

(3) 混态一定是经典态吗？
不一定。

4

已知位移算符 $\hat{D}(\beta)=\exp\left(\beta\hat{a}^\dagger-\beta^*\hat{a}\right)$，相干态 $|\beta\rangle=\hat{D}(\beta)|0\rangle$，$\beta$ 为非零复数，$\hat{a}^\dagger$ 是光子的产生算符，$\hat{a}$ 是光子的湮灭算符，试计算：

(1) 关系式 $\hat{D}(\beta)\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{D}^\dagger(\beta)$；

(2) 相干态 $|\beta\rangle$ 在坐标表象中的结果 $\langle x|\beta\rangle$；

(3) 相干态 $|\beta\rangle$ 的 Q 函数和 Wigner 函数；

(4) 振动坐标在相干态谐振子势场下的平均值随时间演化规律。

---

(1) 对于任意算符 A,B，有

$$e^{-\alpha A}Be^{\alpha A}=B-\alpha[A,B]+\frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]]+\cdots \tag{13}$$

令 $A=a$，$B=a$，则

$$e^{-\beta^*a}ae^{\beta^*a}=a \tag{14}$$

令 $A=-a^\dagger$，$B=a$，则

$$e^{\beta a^\dagger}ae^{-\beta a^\dagger}=a-\beta \tag{15}$$

于是

$$D(\beta)aD(\beta)^\dagger=e^{\beta a^\dagger}e^{-\beta^*a}ae^{\beta^*a}e^{-\beta a^\dagger}=e^{\beta a^\dagger}ae^{-\beta a^\dagger}=a-\beta \tag{16}$$

同理

$$D(\beta)a^\dagger D^\dagger(\beta)=a^\dagger-\beta^* \tag{17}$$

故

$$D(\beta)a^\dagger aD^\dagger(\beta)=D(\beta)a^\dagger D^\dagger(\beta)D(\beta)aD^\dagger(\beta)=(a^\dagger-\beta^*)(a-\beta) \tag{18}$$

(2)

$$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{i}{m\omega}p_x\right)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{19}$$

令 $\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$，进行无量纲化处理

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi+\frac{\partial}{\partial\xi}\right) \tag{20}$$

则

$$\langle x|a|x'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\delta(x-x') \tag{21}$$

由于

$$a|\beta\rangle=\beta|\beta\rangle \qquad \langle x|a|\beta\rangle=\beta\langle x|\beta\rangle$$

又

$$\langle x|a|\beta\rangle=\int\langle x|a|x'\rangle\langle x'|\beta\rangle\,\mathrm{d}x'=\int\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\delta(x-x')\langle x'|\beta\rangle\,\mathrm{d}x'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\langle x|\beta\rangle=\beta\langle x|\beta\rangle \tag{22}$$

令 $\langle x|\beta\rangle = f$，则

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}\right) f = \beta f \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi} = -(\xi - \sqrt{2}\beta) f \tag{23}$$

解出

$$f = \langle x|\beta\rangle = A e^{-\frac{1}{2}(\xi - \sqrt{2}\beta)^2} \tag{24}$$

归一化求系数 A，可相差一个与 x 无关的相位因子 δ

$$A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\frac{1}{4}(\beta-\beta^*)^2} e^{i\delta} \tag{25}$$

故

$$\langle x|\beta\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\frac{1}{4}(\beta-\beta^*)^2} e^{i\delta} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - \sqrt{2}\beta)^2} \tag{26}$$

(3) Q 函数

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha-\beta|^2} \tag{27}$$

P 函数

$$P(\alpha, \alpha^*) = \delta(\alpha - \beta) \tag{28}$$

Wigner 函数

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \int \mathrm{d}\alpha' P(\alpha') e^{-2|\alpha-\alpha'|^2} = \frac{2}{\pi} \int \mathrm{d}\alpha' \delta(\alpha' - \beta) e^{-2|\alpha-\alpha'|^2} = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha-\beta|^2} \tag{29}$$

(4) 设初始态为相干态 $|\beta\rangle$，系统 Hamiltonian

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{30}$$

任一时刻系统状态

$$|\psi\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(t=0)\rangle = e^{i\omega t(a^\dagger a + \frac{1}{2})} |\beta\rangle = e^{-i\omega t/2} \left|\beta e^{-i\omega t}\right\rangle \tag{31}$$

振动坐标可用产生与湮灭算符表示

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \tag{32}$$

振动坐标在相干态光场下的平均值

$$\langle\psi| x |\psi\rangle = \left\langle\beta e^{-i\omega t}\right| x \left|\beta e^{-i\omega t}\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left\langle\beta e^{-i\omega t}\right| (a + a^\dagger) \left|\beta e^{-i\omega t}\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\beta e^{-i\omega t} + \beta^* e^{i\omega t}) \tag{33}$$

5

已知混沌场的密度算符 $\hat{\rho} = Z^{-1}\exp\left(-\hat{H}/k_BT\right)$，其中 $Z = \mathrm{tr}\left[\exp\left(-\hat{H}/k_BT\right)\right]$，系统的哈密顿算符 $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$，求此混沌场系统中

(1) 按 Fock 态展开下光场分布函数；

(2) 等时归一化二阶关联函数 $g^{(2)}(0)$；

(3) 光子计数器计数分布函数。

---

(1)

$$\rho = \frac{\exp\left(-\hat{H}/k_BT\right)}{\mathrm{tr}\left[\exp\left(-\hat{H}/k_BT\right)\right]} = \sum_n \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)\right]\exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{k_BT}\right)|n\rangle\langle n| \tag{34}$$

$$\langle n\rangle = \mathrm{tr}\left(a^\dagger a\rho\right) = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right) - 1\right]^{-1} \tag{35}$$

$$\rho = \sum_n \frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}|n\rangle\langle n| \tag{36}$$

$$P_n = \rho_{nn} = \langle n|\rho|n\rangle = \frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}} \tag{37}$$

(2)

$$P(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi\langle n\rangle}e^{-|\alpha|^2/\langle n\rangle} \tag{38}$$

$$g^{(2)}(0) = \frac{\int P(\alpha,\alpha^*)|\alpha|^4\mathrm{d}^2\alpha}{\left[\int P(\alpha,\alpha^*)|\alpha|^2\mathrm{d}^2\alpha\right]^2} = 2 \tag{39}$$

(3)

$$P_n = \int \mathrm{d}^2\alpha P(\alpha,\alpha^*)\frac{(\eta|\alpha|^2)^n}{n!}e^{-\eta|\alpha|^2} = \frac{(\eta\langle n\rangle)^n}{(1+\eta\langle n\rangle)^{n+1}} \tag{40}$$

6

处在相干压缩态 $|\alpha,\xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)|0\rangle$ 时，分别求出电场的相位正交的两幅度分量 $\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(a+a^\dagger)$ 和 $\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(a-a^\dagger)$ 的量子涨落。

$$\langle\alpha,\xi| a |\alpha,\xi\rangle = \langle\alpha| (a\cosh r - a^\dagger e^{i\theta}\sinh r)|\alpha\rangle = \alpha\cosh r - \alpha^* e^{i\theta}\sinh r \tag{41}$$

$$\langle\alpha,\xi| a^\dagger |\alpha,\xi\rangle = \langle\alpha| (a^\dagger\cosh r - a e^{-i\theta}\sinh r)|\alpha\rangle = \alpha^*\cosh r - \alpha e^{-i\theta}\sinh r \tag{42}$$

$$\langle\alpha,\xi| a^2 |\alpha,\xi\rangle = \alpha^2\cosh^2 r + (\alpha^*)^2 e^{i2\theta}\sinh^2 r - \left(2|\alpha|^2+1\right) e^{i\theta}\sinh r\cosh r \tag{43}$$

$$\langle\alpha,\xi| (a^\dagger)^2 |\alpha,\xi\rangle = (\alpha^*)^2\cosh^2 r + \alpha^2 e^{-i2\theta}\sinh^2 r - \left(2|\alpha|^2+1\right) e^{-i\theta}\sinh r\cosh r \tag{44}$$

$$\langle\alpha,\xi| a^\dagger a |\alpha,\xi\rangle = |\alpha|^2(\cosh^2 r + \sinh^2 r) - \left[(\alpha^*)^2 e^{i\theta} + \alpha^2 e^{-i\theta}\right]\sinh r\cosh r + \sinh^2 r \tag{45}$$

$$\langle\alpha,\xi| a a^\dagger |\alpha,\xi\rangle = 2\langle\alpha,\xi| a^\dagger a |\alpha,\xi\rangle + 1 \tag{46}$$

故

$$\langle\alpha,\xi| X_1 |\alpha,\xi\rangle = \frac{1}{2}\langle\alpha,\xi| (a+a^\dagger) |\alpha,\xi\rangle = \frac{1}{2}\left(\alpha\cosh r - \alpha^* e^{i\theta}\sinh r + \alpha^*\cosh r - \alpha e^{-i\theta}\sinh r\right) \tag{47}$$

$$\langle\alpha,\xi| X_2 |\alpha,\xi\rangle = \frac{1}{2}\langle\alpha,\xi| (a-a^\dagger) |\alpha,\xi\rangle = \frac{1}{2}\left(\alpha\cosh r - \alpha^* e^{i\theta}\sinh r - \alpha^*\cosh r + \alpha e^{-i\theta}\sinh r\right) \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\langle\alpha,\xi| X_1^2 |\alpha,\xi\rangle =& \frac{1}{4}\langle\alpha,\xi| \left[a^2 + (a^\dagger)^2 + 2a^\dagger a + 1\right] |\alpha,\xi\rangle \\ =& \frac{1}{4}\Big[\alpha^2\cosh^2 r + (\alpha^*)^2 e^{i2\theta}\sinh^2 r - \left(2|\alpha|^2+1\right) e^{i\theta}\sinh r\cosh r \\ &+ (\alpha^*)^2\cosh^2 r + \alpha^2 e^{-i2\theta}\sinh^2 r - \left(2|\alpha|^2+1\right) e^{-i\theta}\sinh r\cosh r \\ &+ 2|\alpha|^2(\cosh^2 r + \sinh^2 r) - 2\left[(\alpha^*)^2 e^{i\theta} + \alpha^2 e^{-i\theta}\right]\sinh r\cosh r + 2\sinh^2 r + 1\Big]\end{aligned} \tag{49}$$

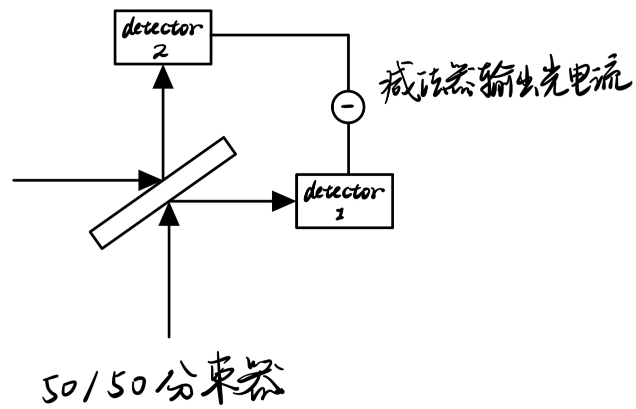
不想写了

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2r}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{-2r}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{50}$$

$$\Delta X_2 = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2r}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{-2r}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{51}$$

7

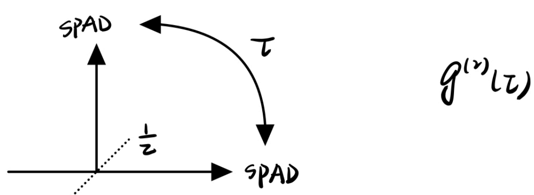
(1) 画出均恒零拍 (homodyne) 混频测量方案示意图，并详细说明其作用。

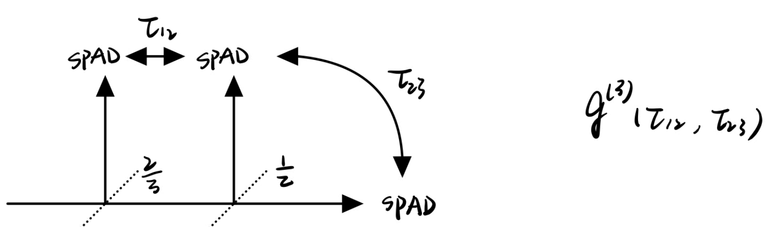


作用:

1. 信号场的两个正交分量 X_1, X_2 包含了场的位相涨落信息。
2. 零拍混频探测方案可以决定两个正交分量 X_1, X_2 的平均值和方差，从而得到位相涨落信息。

(2) 画出二阶关联函数测量方案示意图，并证明为什么能测量它。三阶关联函数如何测量?





8

某波色子体系的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar J\left(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger\right) \tag{52}$$

其中 ω 是频率，J 是耦合强度，试问:

(1) 如何使体系对角化（退耦合)?

(2) 求体系哈密顿算符的本征值。

---

(1)

$$\begin{aligned}
H =&\hbar \begin{pmatrix} a^\dagger & b^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & J \\ J & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{4}\hbar \begin{pmatrix} a^\dagger & b^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & J \\ J & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} a^\dagger - b^\dagger & a^\dagger + b^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega - J & 0 \\ 0 & \omega + J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - b \\ a + b \end{pmatrix} \\
=&\hbar \begin{pmatrix} c^\dagger & d^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega - J & 0 \\ 0 & \omega + J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\
=&\hbar(\omega - J)c^\dagger c + \hbar(\omega + J)d^\dagger d
\end{aligned} \tag{53}$$

其中

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - b) \qquad d = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b)$$

(2)

$$E = \hbar(\omega - J)\left(n_c + \frac{1}{2}\right) + \hbar(\omega + J)\left(n_d + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega + \hbar(\omega - J)n_c + \hbar(\omega + J)n_d \tag{54}$$

其中

$$c^\dagger c\left|n_c, n_d\right\rangle = n_c\left|n_c, n_d\right\rangle \qquad d^\dagger d\left|n_c, n_d\right\rangle = n_d\left|n_c, n_d\right\rangle$$

9

从 Master 方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}=[\hat{H},\hat{\rho}]$ 出发，推导出力学量 $\hat{A}$ 的平均值随时间演化的方程。

$$\langle\hat{A}\rangle=\operatorname{tr}\left(\rho\hat{A}\right) \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\langle\hat{A}\rangle}{\partial t}=&\operatorname{tr}\left(\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}\hat{A}\right)=\frac{1}{i\hbar}\operatorname{tr}\left([\hat{H},\hat{\rho}]\hat{A}\right)=\frac{1}{i\hbar}\operatorname{tr}\left(\hat{H}\hat{\rho}\hat{A}-\hat{\rho}\hat{H}\hat{A}\right)\\=&\frac{1}{i\hbar}\operatorname{tr}\left(\hat{\rho}\hat{A}\hat{H}-\hat{\rho}\hat{H}\hat{A}\right)=\frac{1}{i\hbar}\operatorname{tr}\left(\hat{\rho}[\hat{A},\hat{H}]\right)=\frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle\end{aligned} \tag{56}$$

10

已知真空压缩态 $|\xi\rangle = S(\xi)|0\rangle$，其中压缩算符

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi \hat{a}^{\dagger 2}\right) \qquad \xi = re^{i\varphi} \tag{57}$$

(1) 如何按 Fock 态 $|n\rangle$ 展开？即求出 $|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ 中的展开系数 c_n；

(2) 请用物理公式阐述实验上如何实现这种压缩光 $|\xi\rangle$；

(3) 你还能举出其他的幺正 (unitary) 操作吗？请说明其作用。

---

(1)

$$S^\dagger(\xi) a S(\xi) = a\cosh r - a^\dagger e^{i\varphi}\sinh r = \mu a - \gamma a^\dagger \tag{58}$$

$$S(\xi) a S^\dagger(\xi) = a\cosh r + a^\dagger e^{i\varphi}\sinh r = \mu a + \gamma a^\dagger \tag{59}$$

$$S(\xi) a S^\dagger(\xi)|\xi\rangle = S(\xi) a S^\dagger(\xi) S(\xi)|0\rangle = S(\xi) a|0\rangle = 0 \tag{60}$$

$$\left(\mu a + \gamma a^\dagger\right)|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\mu a + \gamma a^\dagger\right)|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\mu\sqrt{n}\,|n-1\rangle + \gamma\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right) = 0 \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
\langle m|\left(\mu a + \gamma a^\dagger\right)|\xi\rangle &= \langle m|\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\mu\sqrt{n}\,|n-1\rangle + \gamma\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\mu\sqrt{n}\,\langle m|n-1\rangle + \gamma\sqrt{n+1}\,\langle m|n+1\rangle\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\mu\sqrt{n}\delta_{m,n-1} + \gamma\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}\right) \\
&\Rightarrow \begin{cases} m = 0, & c_1 = 0 \\ m \geq 1, & c_{m+1}\mu\sqrt{m+1} + c_{m-1}\gamma\sqrt{m} = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{62}$$

当 $m \geq 1$ 时，$c_{m+1}\mu\sqrt{m+1} + c_{m-1}\gamma\sqrt{m} = 0$，即

$$c_{n+1} = -\frac{\gamma}{\mu}\sqrt{\frac{n}{n+1}}c_{n-1} \tag{63}$$

$$c_{2n} = (-1)^n\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}e^{in\varphi}\tanh^n r c_0 = (-1)^n\frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!}e^{in\varphi}\tanh^n r c_0 \tag{64}$$

$$c_{2n+1} = 0 \tag{65}$$

利用 $\langle\xi|\xi\rangle = 1$ 求 c_0

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \tag{66}$$

(2) 通过 SPDC 过程实现压缩态

$$|\psi(t)\rangle = e^{\eta\left[a^2 e^{-i\theta} - (a^\dagger)^2 e^{i\theta}\right]t}|\psi(t=0)\rangle = S(2\eta e^{i\theta}t)|\psi(t=0)\rangle \tag{67}$$